

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 111.

A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 104.

A3. Θεώρημα σχολικού βιβλίου σελίδα 74.

A4. α)→ψ

β)

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

π.χ. Αν $f(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,
οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

A5. α→Σ

β→Σ

γ→Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$

Έχουμε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3) = (3x_2+1)(x_1-3) \Leftrightarrow \dots x_1=x_2$

Άρα η f είναι 1-1, οπότε η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$

B2. Έχουμε $y=f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow xy - 3y = 3x + 1 \Leftrightarrow (y - 3)x = 3y + 1 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{3y + 1}{y - 3}, y \neq 3 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{3y + 1}{y - 3}, y \neq 3$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, x \neq 3$

Επομένως $f^{-1} \circ f = \text{id}$.

B3. Για να ορίζεται η παράσταση $f(f(x))$ πρέπει:

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_f \Leftrightarrow x \neq 3$ και $\frac{3x+1}{x-3} \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $3x+1 \neq 3x-9 \Leftrightarrow x \neq 3$.

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $f \circ f$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{3\}$ και τύπο

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑ)

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{3f(x) + 1}{f(x) - 3} = \frac{3 \frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{9x + 3 + x - 3}{3x + 1 - 3x + 9} = \frac{10x}{10} = x$$

B4. Για $x \neq \frac{-1}{3}$ έχουμε

$$\left| f(x) \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| = |f(x)| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)|$$

Επομένως $-|f(x)| \leq f(x) \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$ και αφού

$$\lim_{x \rightarrow -1/3} |-f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1/3} |f(x)| = 0, \text{ τότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1/3} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OBM έχουμε $(BM) = (OB) \cdot \eta\mu\theta \Leftrightarrow (BM) = \eta\mu\theta$ και $(OM) = (OB) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow (OM) = \sigma\upsilon\nu\theta$.

Άρα $(B\Gamma) = 2(BM) = 2\eta\mu\theta$ και $(AM) = (OA) + (OM) = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$

Το τρίγωνο ABΓ έχει εμβαδόν

$$E(\theta) = \frac{1}{2} (B\Gamma)(AM) = \frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta, \theta \in (0, \pi)$$

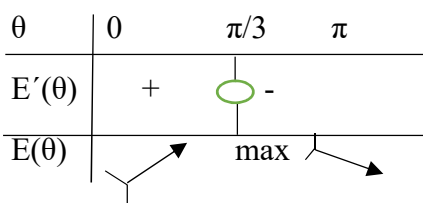
Γ2. Για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ έχουμε

$$E'(\theta) = -\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = -\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1$$

$$\text{Έχουμε } E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \xLeftrightarrow[\theta \in (0, \pi)] \theta = \frac{\pi}{3}$$

Επειδή $E'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ τότε $E'(\theta) > 0$ στο $(0, \pi/3)$ και

$E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$, τότε $E'(\theta) < 0$ στο $(\pi/3, \pi)$.



Για $\theta = \frac{\pi}{3}$ το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ μεγιστοποιείται.

Γ3.

- Η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (0, \pi/3]$ οπότε

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑ)

$E(A_1) = (\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta), f(\frac{\pi}{3})) = (0, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$ και αφού $\frac{3}{4} \in E(A_1)$ τότε υπάρχει μοναδικό $\theta_1 \in (0, \pi/3)$ τέτοιο ώστε $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$

• Η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = [\frac{\pi}{3}, \pi)$ οπότε

$E(A_2) = (\lim_{x \rightarrow \pi^-} E(\theta), E(\frac{\pi}{3})) = (0, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$ και αφού $\frac{3}{4} \in E(A_2)$ τότε υπάρχει μοναδικό $\theta_2 \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ τέτοιο ώστε $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$.

Γ4.

• Η E είναι συνεχής στο $[\theta_1, \frac{\pi}{3}]$ και παραγωγίσιμη στο $(\theta_1, \frac{\pi}{3})$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\theta_1, \frac{\pi}{3})$ τέτοιο ώστε:

$$E'(\xi_1) = \frac{E(\frac{\pi}{3}) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow (\frac{\pi}{3} - \theta_1) E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \quad (1)$$

• Η E είναι συνεχής στο $[\frac{\pi}{3}, \theta_2]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(\frac{\pi}{3}, \theta_2)$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\frac{\pi}{3}, \theta_2)$ τέτοιο ώστε:

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E(\frac{\pi}{3})}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow (\theta_2 - \frac{\pi}{3}) E'(\xi_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει:

$$(\frac{\pi}{3} - \theta_1) E'(\xi_1) = (\theta_2 - \frac{\pi}{3}) E'(\xi_2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Αφού $f''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ τότε η f' γν. αύξουσα $(0, +\infty)$ και αφού $f'(1) = 0$ τότε η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

Για $0 < x < 1$: $f'(x) < f'(1) = 0$

Για $x > 1$: $f'(x) > f'(1) = 0$.

Άρα στο $x=1$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = -\ln 1$. Το σημείο $A(1, \ln 1)$ είναι το σημείο του ελάχιστου το οποίο ανήκει στην ευθεία $x=1$ καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Έχουμε $x^x \geq \lambda x$ για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x)$ για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0$ για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq \ln 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑ)

Άρα $\lambda_{\max}=1$

Δ3. Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y=\lambda$ είναι μοναδική εφαπτομένη της C_g , η οποία διέρχεται από το $O(0, 0)$ αρκεί να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} g'(x_0)=1 \\ g(x_0)=x_0 \end{cases}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $y'(x)=(x^x)'=(e^{x \ln x})'=(x \ln x)' \cdot e^{x \ln x}=(1+\ln x)x^x$

Έχουμε

$$\begin{cases} g'(x_0) = 1 \\ g(x_0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \ln x_0)x_0^{x_0} = 1 \\ x_0^{x_0} = x_0 \end{cases}$$

Άρα $(1+\ln x_0) \cdot x_0 = 1 \Leftrightarrow 1 + \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Άρα η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της φ στο σημείο της $A(1, 1)$.

Δ4. i.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^u = e^0 = 1$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

• Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η h έχει τύπο $h(x)=x^x=e^{x \ln x}$ και είναι συνεχής ως σύνθεση των συγχών συναρτήσεων $h_1(x)=e^x$ και $h_2(x)=x \ln x$.

Άρα η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

ii.

Στο ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 h(1-t) dt$ θέτουμε $u=1-t$ οπότε $dt=-du$.

Για $t=0$ είναι $u_1=1$

Για $t=1$ είναι $u_2=0$.

Άρα

$$I = - \int_1^0 h(u) du = \int_0^1 h(u) du$$

Θέτουμε τη συνάρτηση

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

$$W(x) = x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(u) du, x \in [0, 1]$$

• Η w είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολωνυμική

• $w(0) = \int_0^1 h(u) du$

$$w(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, οπότε

$$\int_0^1 h(x) dx > 0 \text{ και άρα } w(0) > 0.$$

Η συνάρτηση $\kappa(x) = x^x - x$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και ισχύει $\kappa(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$)

Άρα

$$\int_1^2 \kappa(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 (x^x - x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx - \int_1^2 x dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 g(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx - \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_1^2 g(x) dx - 3 > 0,$$

Οπότε $w(1) < 0$

Αφού $w(0) > 0$, $w(1) < 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $w(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

**ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β.
– ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.**

www.floropoulos.gr